Prolégomènes

Dans tout le problème n désigne un entier naturel strictement positif, $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbf{R}^n$ l'espace vectoriel réel euclidien canonique de dimension n. $\mathbf{R}^n$ est également canoniquement muni d'une structure d'espace affine. On choisit pour origine, notée O, le vecteur nul de l'espace vectoriel.

On note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y de $\mathbf{R}^n$ et $||x||$ la norme euclidienne de x.

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ le groupe des matrices carrées de dimension n inversibles et on note $\det(A)$ le déterminant de la matrice carrée A. Si E est une partie de $\mathbf{R}^n$ et A une matrice dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, on note $A(E)$ l'image de E par l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à A.

Si E est une partie de $\mathbf{R}^n$, on appelle figure polaire de E, notée E^*, la partie de $\mathbf{R}^n$ formée des points y tels que $\langle x, y\rangle$ est inférieur à 1 pour tout x dans E :

$$E^* = \{y \in \mathbf{R}^n \mid \forall x \in E,\ \langle x, y\rangle \leqslant 1\}\ .$$

On rappelle qu'une partie de $\mathbf{R}^n$ est convexe si, pour tout couple (A, B) de ses points, elle contient le segment $[A, B]$. Une fonction f d'une partie E de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ est dite convexe si E est convexe et si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall \lambda \in [0; 1], \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

(i.e. le graphe de f est sous ses cordes). On dit que f est strictement convexe si elle est convexe et si l'inégalité précédente n'est une égalité que si $x = y$ ou $\lambda \in \{0, 1\}$. Enfin f est dite (strictement) concave si $-f$ est (strictement) convexe.

Une partie E de $\mathbf{R}^n$ est dite O-symétrique si elle est globalement invariante par la symétrie centrale (affine) de centre O. Si λ est un scalaire, on note λE l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport λ.

On dit qu'une partie E de $\mathbf{R}^n$ est un corps convexe si elle est convexe et d'intérieur non vide. On remarquera qu'un corps convexe O-symétrique contient toujours O dans son intérieur (car si x est intérieur, il en est de même de $-x$ par symétrie et aussi de $(x + (-x))/2$ par convexité).

Enfin si E est une partie Lebesgue-mesurable de $\mathbf{R}^n$ on note $\mathrm{vol}(E)$ son volume.

Les deuxième et troisième parties sont indépendantes l'une de l'autre. Il est rappelé que la présentation, la rédaction et la précision sont des éléments importants d'appréciation des copies.

Partie I — Généralités

Soit K un corps convexe et compact de $\mathbf{R}^n$ contenant O dans son intérieur.

Question 1

Soit K_0 et K_1 des parties convexes de $\mathbf{R}^n$ et θ un réel dans $[0; 1]$; montrer que K_θ est convexe, où on a noté

$$K_\theta = (1-\theta)K_0 + \theta K_1 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \exists (x_0, x_1) \in K_0 \times K_1\ ,\ x = (1-\theta)x_0 + \theta x_1\}\ .$$

Question 2

Soit A une matrice dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Montrer $(A(K))^* = {}^tA^{-1}(K^*)$.

Question 3

Soit x dans $\mathbf{R}^n$, on pose $I_x = \{\lambda \in \mathbf{R}_+ \mid x \in \lambda K\}$.

3.a Montrer que I_x est un intervalle fermé non majoré de $\mathbf{R}_+$.

3.b On peut donc poser $j_K(x) = \inf I_x$; c'est un réel positif. Soit ∂K la frontière de K. Montrer

$$x \in K \Leftrightarrow j_K(x) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad x \in \partial K \Leftrightarrow j_K(x) = 1\ .$$

Question 4 *(Étude d'exemples)*

4.a Expliciter K^*, j_K et j_{K^*} dans les trois cas suivants :

1. K est le disque unité (euclidien) de $\mathbf{R}^2$,
2. K est le carré $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1\}$,
3. K est un parallélogramme, dans $\mathbf{R}^2$, de centre O.

4.b Montrer que K^* est un corps convexe, compact, contenant O dans son intérieur et

$$\forall y \in \mathbf{R}^n \qquad j_{K^*}(y) = \max\{\langle x, y\rangle \mid x \in K\}\ .$$

4.c On suppose que K est O-symétrique. Montrer que j_K et j_{K^*} sont des normes. Que dire de $(\mathbf{R}^n, j_K)$ et $(\mathbf{R}^n, j_{K^*})$?

Question 5 *(Un résultat de dualité)*
On note p_K la projection sur le convexe compact K.
5.a Soit a n'appartenant pas à K et H l'hyperplan passant par $p_K(a)$ et orthogonal à la droite passant par a et $p_K(a)$. Montrer qu'il existe une équation de H de la forme

$$H = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle x, u\rangle = 1\}$$

pour un certain vecteur u de $\mathbf{R}^n$, telle que $\langle a, u\rangle > 1$ et, pour tout point x de K, $\langle x, u\rangle \leqslant 1$.
5.b Montrer $(K^*)^* = K$.

Question 6 *(Projection d'un convexe)*
Soit pr_H une projection (affine) de $\mathbf{R}^n$ d'image un hyperplan affine H et de direction quelconque D (une droite affine) non parallèle à H. On munit l'espace affine d'un repère (non nécessairement orthogonal) tel que H soit l'hyperplan d'équation $x_n = 0$ et D la droite d'équation $x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0$.

Montrer qu'il existe φ_K et φ^K des applications de $pr_H(K)$ dans $\mathbf{R}$ respectivement convexe et concave telles que K soit l'ensemble des $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tels que $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ appartient à $pr_H(K)$ et

$$\varphi_K(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant \varphi^K(x_1, \ldots, x_{n-1})\ .$$

Partie II — Géométrie des formes quadratiques

On appelle ellipsoïde (sous-entendu centré en O) la boule unité pour une forme quadratique définie positive sur $\mathbf{R}^n$. Il revient au même de se donner une matrice symétrique définie positive A et de considérer le sous-ensemble $E(A)$ de $\mathbf{R}^n$ des x tels que $\langle x, Ax\rangle \leqslant 1$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des ellipsoïdes. En identifiant l'ellipsoïde $E(A)$ aux coefficients $a_{i,j}$ de A avec $i \leqslant j$, on considère $\mathcal{E}$ comme une partie de $\mathbf{R}^{n(n+1)/2}$ et on le munit de la topologie induite.

Question 1 *(Ellipsoïdes et boules unités)*
Soit A une matrice symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive telle que $B^2 = A^{-1}$. En déduire qu'un ellipsoïde est l'image de la boule unité (euclidienne) par une application linéaire.

Question 2 *(Ellipsoïdes et convexité)*
Montrer que l'application $A \mapsto (\det A)^{-1/2}$ de l'ensemble des matrices $n \times n$ symétriques définies positives dans $\mathbf{R}_+^*$ est strictement convexe. (On pourra songer à considérer le logarithme.)

Question 3 *(Ellipsoïde maximal)*
Soit K un corps convexe compact O-symétrique de $\mathbf{R}^n$.
3.a Soit v un réel strictement positif. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_{K,v}$ des ellipsoïdes de $\mathbf{R}^n$ ayant un volume supérieur à v et inclus dans K est une partie compacte de $\mathcal{E}$.

3.b En déduire qu'il existe un unique ellipsoïde E_K de $\mathbf{R}^n$ inclus dans K et de volume maximal pour cette propriété.

Question 4 *(Formes quadratiques et corps convexes)*
4.a Soit K un corps convexe compact O-symétrique de $\mathbf{R}^n$. On note Is_K le groupe des automorphismes linéaires u de $\mathbf{R}^n$ tels que $u(K) = K$. Montrer qu'il existe une forme quadratique q_K définie positive invariante par Is_K, i.e.

$$\forall u \in \mathrm{Is}_K,\ \forall x \in \mathbf{R}^n \qquad q_K(u(x)) = q_K(x)\ .$$

4.b Donner E_K et une forme q_K possible dans chacun des exemples de I.4.a.

Partie III — Théorème de Brunn-Minkowski

Soit K_0 et K_1 deux parties compactes de $\mathbf{R}^n$ **non nécessairement convexes**. On note

$$K_0 + K_1 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \exists (k_0, k_1) \in K_0 \times K_1 \quad x = k_0 + k_1\} .$$

Le but de cette partie est de démontrer l'inégalité suivante (théorème de Brunn-Minkowski) :

$$\mathrm{vol}(K_0)^{1/n} + \mathrm{vol}(K_1)^{1/n} \leqslant \mathrm{vol}(K_0 + K_1)^{1/n} . \tag{1}$$

On **admettra** pour la suite la précision suivante. L'égalité ne se produit que dans les cas suivants : soit $\mathrm{vol}(K_0) = \mathrm{vol}(K_1) = 0$, soit l'un des compacts est réduit à un point, soit K_0 et K_1 sont images l'un de l'autre par une homothétie affine ou une translation.

Question 1
Si $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $b = (b_1, \dots, b_n)$ sont deux n-uplets de réels, on note $P(a, b)$ le parallélépipède rectangle donné par

$$P(a, b) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \forall i \in [1; n]\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\} .$$

On appelle standard un parallélépipède qui est de cette forme et est d'intérieur non vide.

On suppose que K_0 et K_1 sont chacun réunions finies de parallélépipèdes standard d'intérieurs disjoints :

$$K_0 = \bigcup_{i=1}^{n_0} P(a^{(i)}, b^{(i)}) \qquad K_1 = \bigcup_{i=1}^{n_1} P(c^{(i)}, d^{(i)}) .$$

On va montrer par récurrence sur $n_0 + n_1$ que l'inégalité (1) est valable pour K_0 et K_1.

1.a Établir l'inégalité (1) dans le cas où K_0 et K_1 sont des parallélépipèdes standard (i.e. $n_0 = n_1 = 1$) en précisant le cas d'égalité (on pourra commencer par diviser par $\mathrm{vol}(K_0 + K_1)^{1/n}$).

1.b Pour n_0 et n_1 quelconques avec n_0 supérieur ou égal à 2, trouver un entier k entre 1 et n ainsi que deux réels t et u de sorte que chacun des demi-espaces $x_k \geqslant t$ et $x_k \leqslant t$ contienne l'un des parallélépipèdes constituant K_0 et que l'hyperplan $x_k = u$ partage K_1 suivant les mêmes proportions que ne le fait $x_k = t$ avec K_0 :

$$\frac{\mathrm{vol}(K_0 \cap \{x_k \leqslant t\})}{\mathrm{vol}(K_0 \cap \{x_k \geqslant t\})} = \frac{\mathrm{vol}(K_1 \cap \{x_k \leqslant u\})}{\mathrm{vol}(K_1 \cap \{x_k \geqslant u\})} .$$

1.c Établir l'inégalité (1) dans le cas où K_0 et K_1 sont des réunions finies de parallélépipèdes standard d'intérieurs disjoints.

Question 2
En déduire le théorème de Brunn-Minkowski.

Partie IV — Étude de la quantité $\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*)$

Soit K un corps convexe compact O-symétrique et E_K l'ellipsoïde de volume maximal inclus dans K (cf. partie II).

Question 1 *(Minoration de* $\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*)$*)*
1.a On suppose ici que E_K est la boule unité (euclidienne) de $\mathbf{R}^n$, notée B_n. Soit x un réel. Montrer que, si le point de coordonnées $(x, 0, \dots, 0)$ appartient à K, alors $|x| \leqslant \sqrt{n}$.

1.b On se replace dans le cas général où E_K est quelconque. Montrer $E_K \subset K \subset \sqrt{n} E_K$ et

$$\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*) \geqslant n^{-n/2} \mathrm{vol}(B_n)^2 .$$

Question 2 *(Étude du cas maximal)*
On suppose ici que K maximise la quantité $\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*)$ parmi les corps convexes compacts O-symétriques.

Soit H un hyperplan vectoriel de $\mathbf{R}^n$. La décomposition orthogonale $\mathbf{R}^n = H \oplus H^\perp$ et le choix d'une base de $H^\perp$ permettent d'identifier les points de $\mathbf{R}^n$ à des couples (x,t) avec x dans H et t dans $\mathbf{R}$. On note, pour t réel,

$$K_t = \{x \in H \mid (x,t) \in K\} .$$

L'ensemble I des réels t tels que K_t est non vide est donc un intervalle symétrique, d'intérieur non vide et compact de $\mathbf{R}$ (ces faits n'ont pas à être démontrés).

2.a Soit ξ dans H, on note φ_ξ^K la fonction convexe de I dans $\mathbf{R}$

$$\varphi_\xi^K(t) = 1 - \sup_{x\in K_t} \langle \xi, x\rangle .$$

Montrer qu'un couple (ξ,λ) de $H\times\mathbf{R}$ appartient à K^* si et seulement si

$$\xi \in (K_0)^* \quad \text{et} \quad -\inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t} \leqslant \lambda \leqslant \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)}{t} .$$

Définition. On définit un ensemble K' ainsi : (x,t) appartient à K' si et seulement si t et x appartiennent respectivement à I et à $\frac{1}{2}(K_t + K_{-t})$ (ce qui est la même chose que $\frac{1}{2}(K_t - K_t)$). Autrement dit x est le milieu d'un point de K_t et d'un point de $K_{-t} = -K_t$. Remarquons que K_t et K_t' sont convexes ou vides et que K' est un corps convexe, compact et O-symétrique. (On ne demande pas de démontrer ces faits.)

2.b Montrer que K' a un plus grand volume que K et qu'il n'y a égalité que si pour t intérieur à I les K_t admettent un centre de symétrie, i.e. il existe μ_t dans H tel que $K_t = 2\mu_t - K_t$ (la symétrie de centre μ_t laisse K_t globalement invariant).

2.c Déduire de la question 2.a que $(K')^*$ a un plus grand volume que K^* et donc que K_t admet un centre de symétrie (noté μ_t) pour tout t dans l'intérieur de I.

2.d Soit ξ dans H ; montrer qu'il existe un réel μ_ξ tel que, pour tout t intérieur à I et strictement positif,

$$\varphi_\xi^K(-t) - \varphi_\xi^K(t) = \mu_\xi t .$$

2.e En déduire qu'il existe μ dans H tel que, pour tout t dans I, K_t admet $t\mu$ comme centre de symétrie et donc qu'il existe une symétrie (non nécessairement orthogonale) s par rapport à H qui laisse K globalement invariant et qui est une isométrie de $\mathbf{R}^n$ pour la norme j_K introduite en première partie.

2.f En déduire que K est un ellipsoïde et que $\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*) = \mathrm{vol}(B_n)^2$. (On rappelle que B_n désigne la boule unité euclidienne de $\mathbf{R}^n$.)

Question 3 *(Conclusion)*
Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des corps convexes compacts O-symétriques de $\mathbf{R}^n$. Pour K_0 et K_1 dans $\mathcal{C}$, on pose

$$d(K_0,K_1) = \inf\{\lambda \in \mathbf{R}_+ \mid e^{-\lambda}K_1 \subset K_0 \subset e^{\lambda}K_1\} .$$

On admettra que $(\mathcal{C}, d)$ est un espace métrique et que, pour tout K dans $\mathcal{C}$ et tout couple de réels (a,b) avec $a \leqslant b$, l'ensemble

$$\{K' \in \mathcal{C} \mid aK \subset K' \subset bK\}$$

est compact.
Montrer que pour tout corps convexe compact et O-symétrique K de $\mathbf{R}^n$, on a

$$\frac{\mathrm{vol}(B_n)^2}{n^{n/2}} \leqslant \mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*) \leqslant \mathrm{vol}(B_n)^2 .$$

Agrégation externe de Mathématiques 2001
Épreuve écrite de Mathématiques Générales

François Sauvageot

5 avril 2001

Partie I — Généralités

Question 1
Soit x et y deux points de K_θ. Il existe donc x_0 et y_0 dans K_0 et x_1 et y_1 dans K_1 tels que $x = (1-\theta)x_0 + \theta x_1$ et $y = (1-\theta)y_0 + \theta y_1$. Pour λ dans $[0;1]$, on a

$$\lambda x + (1-\lambda)y = (1-\theta)\left(\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0\right) + \theta\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1\right)$$

et donc $\lambda x + (1-\lambda)y$ appartient à K_θ par convexité de K_0 et de K_1 : K_θ est donc bien convexe.

Question 2
Soit y dans $\mathbf{R}^n$. On a

$$\begin{aligned} y \in (A(K))^* &\Leftrightarrow \forall x \in K,\ \langle y, A(x)\rangle \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in K,\ \langle {}^tA(y), x\rangle \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow {}^tA(y) \in K^* \\ &\Leftrightarrow y \in {}^tA^{-1}(K^*) \end{aligned}$$

D'où $(A(K))^* = {}^tA^{-1}(K^*)$.

Question 3
3.a Comme O est intérieur à K, K contient une boule fermée centrée en O et de rayon r strictement positif et donc, si x est non nul, $rx/||x||$ appartient à K et $||x||/r$ appartient à I_x. C'est encore vrai si x est nul et donc I_x n'est pas vide.

Soit λ et μ deux réels avec $\mu \geqslant \lambda$. Pour tout x dans K le segment $[0;\mu x]$ contient le segment $[0;\lambda x]$. Par conséquent, puisque K contient O et est convexe, il en est de même de son image par une homothétie de centre O (car il en serait de même pour l'image par une application affine quelconque préservant O) et μK contient λK. Il en résulte $\lambda \in I_x \Rightarrow \mu \in I_x$ et donc que I_x est un intervalle non majoré.

Enfin soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points de I_x convergente vers un certain λ dans $\mathbf{R}$. Par définition on peut trouver une suite $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de points de K telle que, pour tout entier naturel n, $x = \lambda_n k_n$. Comme K est compact, la suite $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$ possède au moins une valeur d'adhérence dans K, disons k. Et donc λk est valeur d'adhérence de la suite $(\lambda_n k_n)_{n\in\mathbf{N}}$, i.e. $x = \lambda k$, et donc λ appartient à I_x. Il en résulte que I_x est fermé.

Remarque : on peut préciser la démonstration de $\lambda K \subset \mu K$. Si λ est nul, alors λK aussi et est inclus dans μK. Si λ n'est pas nul et si x appartient à λK, alors

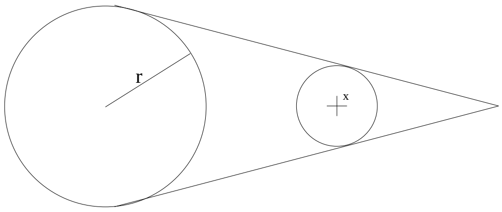
$$x = \mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu-\lambda}{\mu}0\right)$$

exhibe x comme μ fois un barycentre à coefficients positifs d'éléments de K, et donc x appartient à μK.

3.b Comme $I_x = [j_K(x); +\infty[$, on a
$$\forall \lambda \in \mathbf{R}_+ \qquad \lambda \in I_x \Leftrightarrow \lambda \geqslant j_K(x)$$
et, en particulier,
$$x \in K \Leftrightarrow 1 \in I_x \Leftrightarrow 1 \geqslant j_K(x) \ .$$

Soit λ un réel positif, x et y deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ avec $y = \lambda x$. On a $\lambda I_x = I_y$ et donc $j_K(y) = \lambda j_K(x)$. Par conséquent, si $j_K(x) = 1$, pour tout ε réel compris strictement entre 0 et 1, on a $(1-\varepsilon)x \in K$ et $(1+\varepsilon)x \notin K$. Ceci exhibe x comme point de la frontière de K.

Pour conclure, il faut (et il suffit de) montrer que si $j_K(x) < 1$, alors x est intérieur à K. Puisque O est intérieur à K, il nous est permis de fixer un réel strictement positif r tel que la boule ouverte B_r de centre O et de rayon r soit contenue dans K. Soit maintenant, pour ε strictement positif, $x_\varepsilon = (1+\varepsilon)x$ et h_ε l'homothétie de centre x_ε et de rapport $\varepsilon/(1+\varepsilon)$.



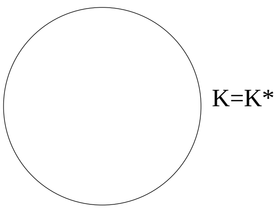
Si x_ε appartient à K, il en est de même pour l'image de B_r par h_ε, par convexité de K et parce que le rapport de h_ε est compris entre 0 et 1. Or cette image n'est autre que la boule de centre x et de rayon $r\varepsilon/(1+\varepsilon)$ et, par conséquent, x est intérieur à K. En particulier, si $j_K(x) < 1$, x_ε appartient à K pour ε suffisamment petit et donc x est intérieur à K.

Remarque : on peut expliciter l'argument précédent. Soit u dans E et x_ε comme précédemment. Si x_ε appartient à K, il en est de même pour
$$x + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}u = \frac{1}{1+\varepsilon}x_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}u$$
dès que $||u|| \leqslant r$, par convexité de K. Ainsi on voit que K contient la boule de centre x et de rayon $r(1 - j_K(x))$.

Question 4

4.a Remarquons que K est bien, dans chaque cas, une partie convexe compacte et O-symétrique de $\mathbf{R}^2$. De plus O appartient toujours à K^*. Dans la suite on note y un point non nul de K^*.

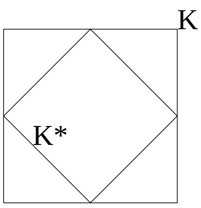
1. **La boule unité**.



Comme $x = y/||y||$ appartient à K, on a nécessairement $||y|| = \langle x, y \rangle \leqslant 1$. Soit maintenant z de norme inférieure à 1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a, pour tout x dans K,
$$\langle x, z \rangle \leqslant ||x||.||z|| \leqslant 1$$
et donc $K^* = K$ est la boule unité. En particulier K^* est un corps convexe compact O-symétrique de $\mathbf{R}^2$.

Soit λ un scalaire strictement positif ; λK est la boule fermée de centre O et de rayon λ et donc, pour tout x dans $\mathbf{R}^2$, on a
$$x \in \lambda K \Leftrightarrow ||x|| \leqslant \lambda \qquad \text{ou encore} \qquad \lambda \in I_x \Leftrightarrow \lambda \geqslant ||x|| \qquad \text{et donc} \qquad j_K(x) = \inf I_x = ||x|| \ .$$
Il en résulte que j_K et j_{K^*} sont toutes les deux la norme euclidienne.

2. **Le carré**.



Pour $x = (x_1, x_2)$ dans $\mathbf{R}^2$, on note $||x||_1 = |x_1| + |x_2|$ et $||x||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.
On s'intéresse donc au carré défini par $||x||_\infty \leqslant 1$. Soit x le point de K dont toutes les coordonnées sont soit 1 soit -1 selon que la coordonnée correspondante de y est positive ou non. On a
$$\langle x, y \rangle = ||y||_1$$
et donc y appartient au losange(carré) défini par $||y||_1 \leqslant 1$. Si maintenant z est un point du losange, on a, pour tout x dans K,
$$\langle x, z \rangle \leqslant ||x||_\infty.||z||_1 \leqslant 1$$
et donc K^* est le losange $||y||_1 \leqslant 1$.

En particulier K^* est un corps convexe compact O-symétrique de $\mathbf{R}^2$. Comme K et K^* sont définis grâce à ces normes, le calcul effectué en 1. montre que j_K est la norme $||.||_\infty$ et j_{K^*} est la norme $||.||_1$.

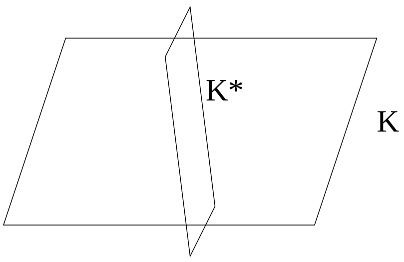
3. **Le parallélogramme.** Soit M et N deux sommets consécutifs de K. Le parallélogramme K est donc celui de sommets M, N, $-M$ et $-N$. Soit $P=(1,1)$ et $Q=(1,-1)$. Comme (O,P,Q) et (O,M,N) sont des repères affines, il existe (un unique) A dans $GL_2(\mathbf{R})$ envoyant le point P sur M et le point Q sur N. De plus A envoie le carré de la question précédente sur K par préservation du barycentre puisque le carré et le parallélogramme sont définis comme les lieux des barycentres à coefficients positifs de P et Q (respectivement de M et N) et de leurs symétriques par rapport à O. Ainsi, pour x dans $\mathbf{R}^2$, on a

$$x \in K \Leftrightarrow ||A^{-1}x||_\infty \leqslant 1 \ .$$

Il en résulte, grâce à la question 2, que K^* est l'image par ${}^t(A^{-1})^{-1} = {}^tA$ du losange précédent, i.e.

$$K^* = \left\{x \in \mathbf{R}^2 \mid ||{}^tAx||_1 \leqslant 1\right\}$$

et en particulier K^* est un corps convexe compact O-symétrique de $\mathbf{R}^2$.



Or donc, si M et N admettent (a,b) et (a',b') comme coordonnées respectives, alors

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+a' & a-a' \\ b+b' & b-b' \end{pmatrix}$$

et $K^* = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid |x_1(a+a')+x_2(b+b')| + |x_1(a-a')+x_2(b-b')| \leqslant 2\right\}$. C'est donc le parallélogramme de sommets

$$M' = \left(\frac{b-b'}{ab'-a'b}, \frac{a'-a}{ab'-a'b}\right) \qquad \text{et} \qquad N' = \left(\frac{b+b'}{ab'-a'b}, -\frac{a+a'}{ab'-a'b}\right)$$

ainsi que leurs symétriques.

Si u est une application linéaire, x un point de $\mathbf{R}^n$ et K' un corps convexe compact, on a

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}_+ \qquad u(x) \in \lambda u(K') \Leftrightarrow x \in \lambda K'$$

et donc $j_{u(K')}(u(x)) = j_{K'}(x)$ ou encore $j_{u(K')} = j_{K'} \circ u^{-1}$. Il en résulte $j_K(x) = ||A^{-1}x||_\infty$ et $j_{K^*}(x) = ||{}^tAx||_1$. De façon explicite on a

$$j_K(x) = 2\max\left(\frac{(a'-a)x_2-(b'-b)x_1}{a'b-ab'}, \frac{(a+a')x_2-(b+b')x_1}{a'b-ab'}\right)$$

et

$$j_{K^*}(x) = \frac{1}{2}\left(|(a+a')x_1+(b+b')x_2| + |(a-a')x_1+(b-b')x_2|\right) \ .$$

4.b K^* est convexe fermé en tant qu'intersection de tels ensembles (c'est l'intersection de demi-espaces fermés).

Si K est contenu dans la boule de centre O et de rayon R (avec R strictement positif), K^* contient la boule de centre O et de rayon $1/R$. En effet soit x dans K et y de norme inférieure à $1/R$, on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\langle x,y\rangle \leqslant ||x||/R \leqslant 1$$

et donc y appartient bien à K^*. Donc ce dernier est bien un corps convexe contenant O dans son intérieur.

Comme K contient O dans son intérieur, il contient une boule de centre O et de rayon r, avec r strictement positif. Il en résulte que K^* est inclus dans la boule de centre O et de rayon $1/r$. En effet soit y non nul dans K^* et $x = ry/||y||$. Comme la norme de x est r, il appartient à K et donc

$$r||y|| = \langle x,y\rangle \leqslant 1 \ .$$

Ainsi K^* est borné et donc compact puisqu'à la fois fermé et borné dans $\mathbf{R}^n$. On a bien démontré que K^* est un corps convexe compact contenant O dans son intérieur.

Soit y dans $\mathbf{R}^n$, par compacité de K et continuité du produit scalaire, la quantité $j(y) = \max\{\langle x, y\rangle \mid x \in K\}$ est bien définie.

Soit λ un réel. Si $0 < \lambda < j(y)$, il existe x dans K tel que $\langle x, y\rangle > \lambda$ et donc $\langle x, y/\lambda\rangle > 1$, i.e. y n'appartient pas à λK^*. Il en résulte $j_{K^*}(y) \geqslant j(y)$. Mais, par le même calcul, y appartient à $j(y)K^*$ et donc $j_{K^*}(y) = j(y)$.

Remarque : on pourrait montrer que si K contient K', alors K^* est contenu dans $K^{'*}$ et que la figure polaire de $B(O,r)$ est $B(O,1/r)$ (en utilisant I.4.a.1 et I.2) et ainsi en déduire directement

$$B(O,r) \subset K \subset B(O,R) \Rightarrow B(O,\frac{1}{R}) \subset K^* \subset B(O,\frac{1}{r}) .$$

4.c Soit x et y dans E et λ dans $\mathbf{R}$. On a

$$j_K(x) = 0 \Leftrightarrow 0 \in I_x \Leftrightarrow x \in 0.K \Leftrightarrow x = 0$$

et, par O-symétrie de K,

$$j_K(-x) = \inf\{\mu \in \mathbf{R}_+ \mid -\mu x \in K\} = \inf\{\mu \in \mathbf{R}_+ \mid \mu x \in K\} = j_K(x) .$$

Comme a déjà remarqué en I.3.b $j_K(|\lambda|x) = |\lambda| j_K(x)$, il en résulte $j_K(\lambda x) = |\lambda| j_K(x)$.

Enfin x et y appartiennent respectivement à $j_K(x)K$ et $j_K(y)K$ et donc, il existe k et k' dans K tels que $x = j_K(x)k$ et $y = j_K(y)k'$. Par convexité de K, on a, si $j_K(x) + j_K(y) \neq 0$,

$$x + y = (j_K(x) + j_K(y)) \left(\frac{j_K(x)}{j_K(x)+j_K(y)}k + \frac{j_K(y)}{j_K(x)+j_K(y)}k'\right) \in (j_K(x) + j_K(y)) K$$

et, si $j_K(x) + j_K(y) = 0$, $x = y = 0$ et donc, dans tous les cas

$$x + y \in (j_K(x) + j_K(y)) K$$

et

$$j_K(x+y) \leqslant j_K(x) + j_K(y) .$$

Par conséquent j_K est une norme sur E.

Il en est de même pour j_{K^*} pour peu que l'on démontre que K^* a les mêmes propriétés que K. D'après I.4.b, il nos suffit de remarquer que K^* est O-symétrique. Or K l'est et donc, pour tout y dans $\mathbf{R}^n$,

$$\begin{aligned} \forall x \in K \qquad \langle x, y\rangle \leqslant 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in -K \qquad \langle x, y\rangle \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in K \qquad \langle -x, y\rangle \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in K \qquad \langle x, -y\rangle \leqslant 1 \end{aligned}$$

i.e. y appartient à K^* si et seulement si $-y$ lui appartient, ou encore K^* est O-symétrique.

Soit u une forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$ identifiée à un vecteur y de $\mathbf{R}^n$; par définition de la norme N sur le dual de $(\mathbf{R}^n, j_K)$, on a

$$N(u) = \sup_{j_K(x) \leqslant 1} u(x) = \sup_{x \in K} \langle x, y\rangle = j_{K^*}(y) .$$

Par conséquent $(\mathbf{R}^n, j_K)^*$ et $(\mathbf{R}^n, j_{K^*})$ sont isomorphes.

Remarque : on peut très bien démontrer que j_{K^*} est une norme à partir de la formule donnée en I.4.b. Néanmoins le seul point délicat est équivalent à la O-symétrie de K^*.

Question 5

5.a Par définition H est l'hyperplan d'équation

$$\langle x - p_K(a), a - p_K(a)\rangle = 0 .$$

Soit maintenant x dans K, pour tout réel λ dans $[0;1]$, le point $(1-\lambda)p_K(a)+\lambda x$ est dans K et est plus éloigné de a que ne l'est $p_K(a)$, i.e.

$$||a-(1-\lambda)p_K(a)-\lambda x||^2 \geqslant ||a-p_K(a)||^2$$

et donc

$$\lambda^2||x-p_K(a)||^2+2\lambda\langle a-p_K(a),p_K(a)-x\rangle \geqslant 0\ .$$

Il en résulte, pour tout λ dans $]0;1]$

$$\langle a-p_K(a),x-p_K(a)\rangle \leqslant \frac{\lambda}{2}||x-p_K(a)||^2$$

et donc

$$\langle a-p_K(a),x-p_K(a)\rangle \leqslant 0\ .$$

De plus tout point x de H est limite de points n'appartenant pas à K, par exemple les points $x_\varepsilon = x+\varepsilon(a-p_K(a))$, pour ε strictement positif, puisque $\langle x_\varepsilon - p_K(a), a-p_K(a)\rangle$ est égal à $\varepsilon||a-p_K(a)||^2$ et est strictement positif. Par conséquent aucun point intérieur à K ne peut appartenir à H, i.e. tout point intérieur à K vérifie

$$\langle a-p_K(a),x-p_K(a)\rangle < 0\ .$$

En particulier, puisque O est intérieur à K,

$$\langle a-p_K(a),p_K(a)\rangle > 0\ .$$

Soit donc u le vecteur

$$u=\frac{1}{\langle a-p_K(a),p_K(a)\rangle}(a-p_K(a))\ .$$

L'hyperplan H est défini par l'équation $\langle x,u\rangle = 1$ et K est contenu dans le demi-espace $\langle x,u\rangle \leqslant 1$ d'après ce qui précède. De plus a n'appartenant pas à K, $||a-p_K(a)||^2$ est strictement positif et donc $\langle a,u\rangle$ est strictement supérieur à 1. Il en résulte que u satisfait les propriétés requises.

5.b Soit $K_1=(K^*)^*$. C'est un corps convexe compact contenant O dans son intérieur d'après la question 4.b. et, de plus, on a, pour tout x dans $\mathbf{R}^n$

$$j_{K_1}(x)=\max\{\langle x,y\rangle \mid y\in K^*\}\ .$$

Soit donc a dans K. Pour tout y dans K^*, on a $\langle a,y\rangle \leqslant 1$, par définition de K^*, et donc $j_{K_1}(a)\leqslant 1$. Par conséquent a appartient à K_1.

Réciproquement, soit a n'appartenant pas à K. D'après ce qui précède on peut trouver u dans $\mathbf{R}^n$ tel que, pour tout x dans K, $\langle x,u\rangle$ soit inférieur à 1 (i.e. u appartient à K^*) mais $\langle u,a\rangle$ soit strictement supérieur à 1. Par conséquent a n'appartient pas à K_1.

En conclusion on a bien montré l'équivalence désirée et donc $(K^*)^*=K$.

Question 6

Notons $K'=pr_H(K)$. Puisque la projection pr_H est une application affine, elle préserve le barycentre et donc K' est convexe. Soit $x'=(x_1,\dots,x_{n-1})$ un point de K' et I l'ensemble

$$I=\{x_n\in\mathbf{R} \mid (x_1,\dots,x_n)\in K\}\ .$$

Par définition de K', I est non vide ; par convexité de K, il est convexe (i.e. est un intervalle) ; par compacité de K, il est borné. Enfin par continuité de pr_H, K' est compact et I est fermé. I est donc un segment. Par conséquent

$$\varphi^K=\sup I \qquad \text{et} \qquad \varphi_K=\inf I$$

sont des quantités finies et on a

$$(x_1,\dots,x_n)\in K \Leftrightarrow \varphi_K(x')\leqslant x_n\leqslant \varphi^K(x')\ .$$

Il nous reste donc à démontrer la convexité et la concavité respectives de φ_K et φ^K.

Soit $x' = (x'_1, \ldots, x'_{n-1})$ et $y' = (y'_1, \ldots, y'_{n-1})$ deux points de K' et λ un réel compris entre 0 et 1.

Comme $(x'_1, \ldots, x'_{n-1}, \varphi_K(x'))$ et $(y'_1, \ldots, y'_{n-1}, \varphi_K(y'))$ sont dans K, il en est de même leurs barycentres à coefficients positifs et donc

$$\varphi_K(\lambda x' + (1-\lambda)y') \leqslant \lambda\varphi_K(x') + (1-\lambda)\varphi_K(y') \ .$$

De même $(x'_1, \ldots, x'_{n-1}, \varphi^K(x'))$ et $(y'_1, \ldots, y'_{n-1}, \varphi^K(y'))$ sont dans K et

$$\varphi^K(\lambda x' + (1-\lambda)y') \geqslant \lambda\varphi^K(x') + (1-\lambda)\varphi^K(y') \ .$$

Les fonctions φ_K et φ^K sont donc bien respectivement convexe et concave.

Partie II — Géométrie des formes quadratiques

Question 1

Soit A une matrice symétrique définie positive, on peut trouver P orthogonale et S diagonale à diagonale strictement positive telles que A soit égale à $P^{-1}SP$. Par positivité des coefficients diagonaux de S, on peut trouver une matrice diagonale T à diagonale strictement positive telle que $T^2 = S^{-1}$ et donc $B = P^{-1}TP$ convient.

De plus, pour x dans $\mathbf{R}^n$, on a

$$\langle Ax, x\rangle = ||B^{-1}x||^2$$

et donc x appartient à $E(A)$ si et seulement si $B^{-1}x$ appartient à la boule unité euclidienne B_n, i.e. si et seulement si x appartient à l'image par B de cette boule. Par conséquent $E(A)$ est l'image par B de B_n.

Question 2

Soit A et B deux matrices symétriques définies positives et λ un réel compris entre 0 et 1. On a

$$\forall X \in E \qquad {}^tX(\lambda A + (1-\lambda)B)X = \lambda {}^tXAX + (1-\lambda){}^tXBX \ .$$

La matrice $\lambda A + (1-\lambda)B$ est donc symétrique définie positive et, par suite, l'ensemble des matrices symétriques définies positives est une partie convexe de l'espace vectoriel $M_n(\mathbf{R})$.

On peut donc se poser la question de la convexité de la fonction $\det^{-1/2}$ sur cette partie. Comme la log-convexité entraîne la convexité, il suffit de montrer que log(det) est strictement concave. Pour A, B et λ comme précédemment, avec A distinct de B et λ de 0 et 1, on peut trouver P dans $GL_n(\mathbf{R})$ et une matrice D de $M_n(\mathbf{R})$ diagonale tels que

$$A = {}^tP.P \qquad \text{et} \qquad B = {}^tP.D.P$$

et donc l'inégalité de concavité pour log(det) s'écrit

$$\lambda \log\left((\det P)^2\right) + (1-\lambda)\log\left(\det D\left(\det(P)^2\right)\right) > \log\left(\det(\lambda I_n + (1-\lambda)D)\left(\det(P)^2\right)\right)$$

où I_n désigne la matrice identité d'ordre n. Autrement dit on veut montrer

$$(1-\lambda)\log(\det D) > \log(\det(\lambda I_n + (1-\lambda)D)) \ .$$

Désignons par $(d_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les coefficients diagonaux de D ; ce sont des réels strictement positifs et l'inégalité peut se récrire

$$(1-\lambda)\sum_{i=1}^n \log(d_i) > \sum_{i=1}^n \log(\lambda + (1-\lambda)d_i) \ .$$

Or la concavité du logarithme entre 1 et x entraîne

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \qquad (1-\lambda)\log x > \log(\lambda + (1-\lambda)x)$$

dès que x est distinct de 1 et λ de 0 et 1. L'assertion en résulte.

Question 3

3.a Soit A une matrice symétrique définie positive. Notons q_A la forme quadratique associée et B une matrice symétrique définie positive telle que $B^2 = A^{-1}$. On a donc $E(A) = B(B_n)$.

Si u est une application linéaire et K un corps convexe compact, on a $j_{u(K)} = j_K \circ u^{-1}$ (comme on l'a déjà vu en I.4.a) et donc, pour x dans $\mathbf{R}^n$, $j_{E(A)} = ||B^{-1}x||$ ou encore $j_{E(A)}(x)^2 = q_A(x)$.

De plus si K et K' sont deux corps convexes compacts, on a $K \subset K'$ si et seulement si $j_K \geqslant j_{K'}$. Par conséquent $E(A)$ est inclus dans K si et seulement si $q_A \geqslant j_K^2$.

Or, à x fixé, la condition $\langle x, Ax\rangle \geqslant j_K(x)^2$ définit un fermé de $M_n(\mathbf{R})$ par continuité du produit scalaire. Il en est donc de même pour l'intersection de ces fermés pour x variant dans $\mathbf{R}^n$. C'est-à-dire que la condition $q_A \geqslant j_K$, ou encore $E(A) \subset K$, définit un fermé de $M_n(\mathbf{R})$.

Puisque $E(A) = B(B_n)$, le volume de $E(A)$ est celui de B_n divisé par $\det(A)^{1/2}$. En particulier une minoration du volume de $E(A)$ équivaut à une majoration de $\det(A)$. Par continuité du déterminant, cette condition définit un fermé de $M_n(\mathbf{R})$ et donc, au final, $\mathcal{E}_{K,v}$ est un fermé.

Remarquons que, K étant compact, il est inclus dans une boule fermée de centre O et de rayon R pour un certain R strictement positif. Par conséquent, si $E(A)$ est inclus dans K, $B(B_n)$ est inclus dans cette boule et toutes les valeurs propres de B sont donc inférieures à R. Autrement dit toutes les valeurs propres de A sont supérieures à $1/R^2$.

Aussi, pour $E(A)$ dans $\mathcal{E}_{K,v}$, le déterminant de A est majoré. Soit Δ un tel majorant. Une valeur propre de A est donc majorée par Δ divisé par le produit de $n-1$ minorants des valeurs propres de A, i.e. par ΔR^{2n-2}. Ainsi ces valeurs propres appartiennent au compact $C = [R^{-2}; \Delta R^{2n-2}]$ de $\mathbf{R}_+^*$.

Comme le groupe des matrices orthogonales est compact, il en est de même de l'ensemble des matrices de la forme ${}^tP.D.P$ avec P orthogonale et D diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous dans C. Par conséquent $\mathcal{E}_{K,v}$ est inclus dans un compact et, étant fermé, il est lui-même compact.

Remarque : on a vraiment besoin de minorer et de majorer les valeurs propres de A (ou celles de B) car on travaille dans un ensemble non fermé. L'ensemble des matrices symétriques positives est fermé, mais pas celui des matrices symétriques définies positives, qui est intersection du fermé précédent et de l'ouvert GL_n.

3.b Comme la fonction déterminant est continue sur $M_n(\mathbf{R})$, la fonction volume est continue sur $\mathcal{E}$. Puisque K contient un voisinage de O, il contient un ellipsoïde. Soit v le volume de cet ellipsoïde. Le maximum de la fonction volume sur l'ensemble des ellipsoïdes inclus dans K est donc atteint sur $\mathcal{E}_{K,v}$. Par continuité de la fonction volume et compacité de $\mathcal{E}_{K,v}$, l'existence d'un ellipsoïde de volume maximal inclus dans K est acquise.

Pour obtenir l'unicité il faut travailler avec une fonction strictement concave. C'est le cas du déterminant sur l'ensemble (convexe) des matrices symétriques définies positives, d'après II.2. Notons $\mathcal{B}_{K,v}$ l'ensemble des matrices symétriques positives telles que B^{-2} appartient à $\mathcal{E}_{K,v}$ ou encore telles que $B(B_n) \subset K$ et $\det(B) \geqslant v/\text{vol}(B_n)$. Par convexité de K la condition $B(B_n)$ définit un convexe ; par concavité du déterminant sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives, la condition $\det(B) \geqslant v/\text{vol}(B_n)$ définit aussi un convexe de cet ensemble. Par conséquent $\mathcal{B}_{K,v}$ est intersection de ces deux convexes et est donc lui aussi convexe. La fonction déterminant y atteint donc un unique maximum. Comme $\text{vol}(E(B^{-2})) = \det(B)\text{vol}(B_n)$, on en déduit que $B \mapsto \text{vol}(E(B^{-2}))$ atteint un unique maximum sur $\mathcal{B}_{K,v}$, i.e. $A \mapsto \text{vol}(E(A))$ atteint un unique maximum sur $\mathcal{E}_{K,v}$.

Question 4

4.a Soit u un automorphisme linéaire, de matrice associée U relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et $E(A)$ un ellipsoïde. On a

$$E(A) \subset K \Leftrightarrow u\left(E(A)\right) \subset u(K) \Leftrightarrow E({}^tUAU) \subset u(K)$$

et donc l'ensemble des ellipsoïdes inclus dans $u(K)$ est tout simplement l'image par u de l'ensemble des ellipsoïdes inclus dans K. De plus les volumes de $E(A)$ et de $u\left(E(A)\right)$ sont proportionnels. Ainsi, par unicité de l'ellipsoïde de volume maximal, il vient $E_{u(K)} = u(E_K)$.

Par conséquent si u est un automorphisme linéaire préservant K, $E_K = u(E_K)$. Notons q_K la forme quadratique associée à E_K. L'assertion précédente est équivalente à $q_K \circ u = q_K$. Par conséquent q_K est une forme quadratique définie positive invariante par Is_K.

4.b

1. **La boule unité.** E_K est égal à K et A est l'identité. Par conséquent la forme quadratique euclidienne standard convient.

2. **Le carré.** Comme le carré admet des symétries, il en est de même pour E_K. En particulier E_K admet les axes de coordonnées et les bissectrices comme axes de symétrie. Ceci force E_K à être la boule unité. Il en résulte que la forme quadratique euclidienne standard convient. On pourrait aussi procéder en donnant $Is_K \simeq D_8$ à condition de l'énoncer d'un point de vue **affine** : en effet Is_K n'est absolument pas une notion euclidienne.

3. **Le parallélogramme.** On écrit K comme l'image par une application linéaire u du carré précédent. E_K est donc l'image par u de la boule unité et q_K peut être définie par $q_K(x) = ||u^{-1}(x)||^2$.

Partie III — Théorème de Brunn-Minkowski

Question 1

1.a Remarquons qu'un parallélépipède standard est un produit d'intervalles I_i de $\mathbf{R}$ pour i entier variant entre 1 et n.

Notons $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les longueurs des intervalles intervenant dans les parallélépipèdes K_0 et K_1 respectivement. Remarquons que ces nombres sont des réels strictements positifs. Il s'agit de démontrer

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} u_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} v_i} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} (u_i + v_i)}$$

ou encore, en posant $t_i = u_i/(u_i + v_i)$ pour i entier entre 1 et n,

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} t_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} (1 - t_i)} \leqslant 1 \ .$$

Cette dernière égalité résulte de l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique.

Le cas d'égalité est obtenu lorsque tous les t_i (et donc tous les $1 - t_i$) sont égaux, autrement dit lorsque tous les rapports u_i/v_i sont égaux. Ceci correspond à des parallélépipèdes homothétiques ou translatés.

1.b Remarquons que si P et Q sont deux parallélépipèdes standard produits respectivement d'intervalles I_i et J_i, alors $P \cap Q$ contient le produit des intersections $I_i \cap J_i$. Par conséquent si P et Q sont d'intérieurs disjoints il existe un indice i tel que I_i et J_i le soient également.

Soit donc P et Q deux parallélépipèdes standard intervenant dans K_0. Notons k un indice obtenu par les considérations précédentes et t un réel séparant les deux intervalles d'intérieurs disjoints I_k et J_k de $\mathbf{R}$. L'hyperplan d'équation $x_k = t$ sépare donc K_0 en deux de telle sorte que chacun des demi-espaces qu'il délimite contienne l'un au moins de ses constituants.

De plus, pour un parallélépipède standard P l'application qui à u associe le volume de $P \cap \{x_k \leqslant u\}$ est continue (et même affine par morceaux). De sorte que $\mathrm{vol}(K_1 \cap \{x_k \leqslant u\})$ et $\mathrm{vol}(K_1 \cap \{x_k \geqslant u\})$ le sont aussi. Le rapport de ces deux quantités variant de 0 à l'infini lorsque u décrit $\mathbf{R}$, l'existence d'un u satisfaisant aux conditions de la question est donc démontrée.

1.c Pour m entier naturel supérieur ou égal à 2, soit H_m la propriété : pour tout couple (K_0, K_1) de compacts réunions de n_0 et n_1 parallélépipèdes standard d'intérieurs disjoints respectivement, avec $n_0 + n_1 \leqslant m$, on a $\mathrm{vol}(K_0)^{1/n} + \mathrm{vol}(K_1)^{1/n} \leqslant \mathrm{vol}(K_0 + K_1)^{1/n}$.

La propriété H_2 est vraie d'après III.1.a.

Pour m quelconque strictement supérieur à 2, par symétrie du problème, on peut supposer $n_0 \geqslant 2$ et par conséquent la question précédente nous permet d'écrire K_0 et K_1 comme réunions disjointes : $K_0^+ \cup K_0^-$ et $K_1^+ \cup K_1^-$ où chacun des ensembles intervenant sont des réunions de parallélépipèdes standard en nombres n_0^+, n_0^-, n_1^+ et n_1^- respectivement avec les conditions $n_0^+ < n_0$, $n_0^- < n_0$, $n_1^+ \leqslant n_1$, $n_1^- \leqslant n_1$ et l'existence d'un scalaire λ tel que

$$\frac{\mathrm{vol}(K_0^+)}{\mathrm{vol}(K_0^-)} = \frac{\mathrm{vol}(K_1^+)}{\mathrm{vol}(K_1^-)} = \lambda \ .$$

De plus $K_0^+ + K_1^+$ et $K_0^- + K_1^-$ sont d'intérieurs disjoints puisqu'ils sont séparés par l'hyperplan $x_k = t + u$ et donc

$$\mathrm{vol}(K_0 + K_1) \geqslant \mathrm{vol}(K_0^+ + K_1^+) + \mathrm{vol}(K_0^- + K_1^-) \ .$$

De plus

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{vol}(K_0)^{1/n} + \mathrm{vol}(K_1)^{1/n}\right)^n &= \frac{\lambda}{1+\lambda}\left(\mathrm{vol}(K_0)^{1/n} + \mathrm{vol}(K_1)^{1/n}\right)^n + \frac{1}{1+\lambda}\left(\mathrm{vol}(K_0)^{1/n} + \mathrm{vol}(K_1)^{1/n}\right)^n \\ &= \left(\mathrm{vol}(K_0^+)^{1/n} + \mathrm{vol}(K_1^+)^{1/n}\right)^n + \left(\mathrm{vol}(K_0^-)^{1/n} + \mathrm{vol}(K_1^-)^{1/n}\right)^n\end{aligned}$$

et donc la propriété est héréditaire.

Le principe de récurrence permet donc de conclure.

Question 2

Soit ε un réel strictement positif. Par compacité de K_0 et K_1 on peut trouver un recouvrement de ces compacts par des réunions finies de parallélépipèdes standard dont chaque côté est de longueur inférieure à ε. Quitte à raffiner ces familles on peut supposer que les parallélépipèdes ont des intérieurs disjoints. Notons K_0^ε et K_1^ε les compacts obtenus par réunion de ces familles.

On a donc, en notant P l'hypercube de centre O et de côté 2,

$$K_0 \subset K_0^\varepsilon \subset K_0 + \varepsilon P \qquad \text{et} \qquad K_1 \subset K_1^\varepsilon \subset K_1 + \varepsilon P \ .$$

Puisque tout compact est mesurable, les deux inégalités de gauche entraînent

$$\mathrm{vol}(K_0) \leqslant \mathrm{vol}(K_0^\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{vol}(K_1) \leqslant \mathrm{vol}(K_1^\varepsilon) \ .$$

Il en résulte, grâce à la question précédente,

$$\left(\mathrm{vol}(K_0)^{1/n} + \mathrm{vol}(K_1)^{1/n}\right)^n \leqslant \left(\mathrm{vol}(K_0^\varepsilon)^{1/n} + \mathrm{vol}(K_1^\varepsilon)^{1/n}\right)^n \leqslant \mathrm{vol}(K_0^\varepsilon + K_1^\varepsilon) \ .$$

De plus, en sommant les deux doubles inégalités ensemblistes précédentes, on obtient

$$K_0 + K_1 \subset K_0^\varepsilon + K_1^\varepsilon \subset K_0 + K_1 + 2\varepsilon P$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{vol}(K_0 + K_1) \leqslant \mathrm{vol}(K_0^\varepsilon + K_1^\varepsilon) \leqslant \mathrm{vol}(K_0 + K_1 + 2\varepsilon P) \ .$$

Faisons maintenant varier ε. Le théorème de convergence dominée (ou de convergence monotone) entraîne

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{vol}(K_0 + K_1 + 2\varepsilon P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{vol}(K_0^\varepsilon + K_1^\varepsilon) = \mathrm{vol}(K_0 + K_1)$$

et le théorème de Brunn-Minkowski résulte donc de l'inégalité

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^* \qquad \left(\mathrm{vol}(K_0)^{1/n} + \mathrm{vol}(K_1)^{1/n}\right)^n \leqslant \mathrm{vol}(K_0^\varepsilon + K_1^\varepsilon) \ .$$

Partie IV — Étude de la quantité $\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*)$

Question 1

1.a Soit M le point de coordonnées $(x, 0, \ldots, 0)$. Si $|x| \leqslant 1$, M appartient à B_n et donc à K. Par symétrie, M est dans K si et seulement si $-M$ l'est. Pour étudier l'appartenance de M à K, on peut donc supposer x supérieur à 1. En particulier il existe u entre 0 et $\pi/2$ tel que $x = 1/\cos(u)$.

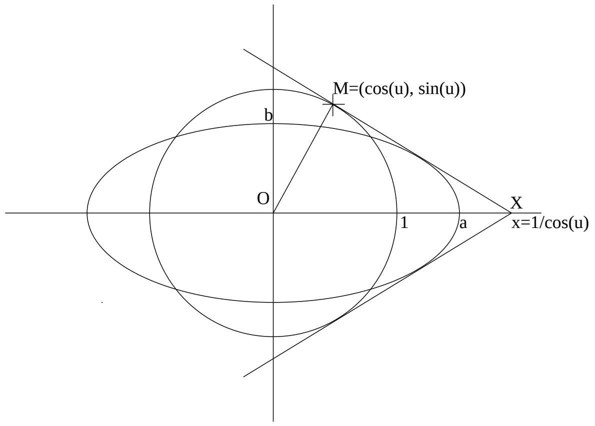
Si K contient B_n et M, il contient l'enveloppe convexe K_x de B_n et des points M et $-M$ par convexité et symétrie. Soit $E_{a,b}$ l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2 + \ldots + x_n^2}{b^2} = 1$$

avec a et b des réels strictement positifs. Son volume est ab^{n-1} fois celui de B_n.

On va montrer que x est inférieur à $\sqrt{n}$ en montrant que, sinon, on peut trouver $E_{a,b}$ de sorte que $E_{a,b}$ soit inclus dans K_x (et donc a fortiori dans K) mais tel que ab^{n-1} soit supérieur à 1.

Fixons a et b, avec $x \geqslant a \geqslant 1 \geqslant b > 0$. Par invariance par symétrie de centre O ainsi que par les isométries qui préservent l'axe (Ox_1), $E_{a,b}$ est inclus dans K_x si et seulement ses points de coordonnées $(x_1, x_2, 0, \ldots, 0)$ le sont, pour x_1 et x_2 positifs. Autrement dit on peut étudier l'inclusion de $E_{a,b}$ dans K_x en se restreignant à la dimension 2 et en se limitant au premier quadrant. Pour la suite du calcul, on se place donc dans ce cas.



Notons X le point de coordonnées $(x, 0)$. Par définition de la notion de (co)sécante, les tangentes au cercle passant par X ont pour équation

$$x_1 \cos(u) \pm x_2 \sin(u) = 1 \ .$$

On le vérifie facilement puisque la distance de O à ces droites est 1 et qu'elles passent par X. Les points de tangences ont respectivement pour coordonnées $(\cos(u), \pm\sin(u))$.

Par symétrie $E_{a,b}$ est inclus dans K_x si et seulement si son intersection avec le premier quadrant l'est. Notons M le point de coordonnées $(\cos(u), \sin(u))$. L'intersection de K_x avec le premier quadrant contient donc le secteur angulaire compris entre (OM) et l'axe des ordonnées ainsi que le triangle (OMX).

Remarquons maintenant que, si la droite (MX) est tangente à $E_{a,b}$, alors, par convexité de l'ellipse, $E_{a,b}$ est sous la droite (MX). Or la tangente en (X_1, Y_1) à $E_{a,b}$ admet pour équation $x_1X_1/a^2 + x_2X_2/b^2 = 1$ et c'est donc (MX) si et seulement si $X_1 = a^2\cos(u)$ et $X_2 = b^2\sin(u)$. Par conséquent (MX) est tangente à $E_{a,b}$ si et seulement si $a^2\cos^2(u) + b^2\sin^2(u) = 1$ ou encore

$$a^2 = x^2 - b^2(x^2-1) = b^2 + x^2(1-b^2) = 1 + (x^2-1)(1-b^2) \ .$$

Si on choisit b quelconque strictement entre 0 et 1 et a défini par la formule précédente, on a $a > 1$ d'après le quatrième membre et $a < x$ d'après le second. Par la suite on supposera un tel choix fait.

Prenons maintenant un point P quelconque de $E_{a,b}$ appartenant au premier quadrant. On peut le prendre de coordonnées $(a\cos(v), b\sin(v))$ avec v entre 0 et $\pi/2$. Si v est inférieur à u, alors P appartient au triangle (OMX) d'après ce qui précède. Si v est supérieur à u alors, d'après le troisième membre des égalités définissant a^2,

$$a^2\cos^2(v) + b^2\sin^2(v) = (a^2-b^2)\cos^2(v) + b^2 \leqslant (a^2-b^2)\cos^2(u) + b^2 = \frac{a^2-b^2}{x^2} + b^2 = 1$$

et donc P appartient au cercle unité. Donc, si $a^2 = b^2 + x^2(1-b^2)$, alors $E_{a,b}$ est inclus dans K_x.

En revenant à notre étude en dimension quelconque, on a, avec le choix de a précédent,

$$\mathrm{vol}(E_{a,b}) \leqslant \mathrm{vol}(B_n) \Leftrightarrow 1 \geqslant (ab^{n-1})^2 = b^{2n} + x^2(b^{2(n-1)} - b^{2n})$$

pour tout b entre 0 et 1, et donc

$$\mathrm{vol}(E_{a,b}) \leqslant \mathrm{vol}(B_n) \Leftrightarrow x^2 \leqslant \frac{1-b^{2n}}{b^{2(n-1)} - b^{2n}} = \frac{b^{-2n}-1}{b^{-2}-1} = \sum_{k=0}^{n-1} b^{-2k} \ .$$

Par conséquent si B_n est l'ellipsoïde maximal inclus dans K, alors $x \leqslant \sqrt{n}$, ce qui est l'assertion demandée.

1.b Par unicité de E_K, si P appartient à $GL_n(\mathbf{R})$, alors $E_{P(K)} = P(E_K)$. Comme E_K est un ellipsoïde, on a $E_K = E(A)$ pour une certaine matrice définie positive A. Si B est l'unique matrice symétrique définie positive telle que $B^2 = A^{-1}$, on a donc $E_K = B(B_n)$.

Soit maintenant x dans K et u une isométrie telle que $u(B^{-1}x)$ appartient à l'axe (Ox_1). Comme B_n est invariante par isométrie, on a $E_K = B \circ u^{-1}(B_n)$ et donc $E_{u\circ B^{-1}(K)} = B_n$. D'après ce qui précède, on a donc $||u(B^{-1}x)|| \leqslant \sqrt{n}$. Or

$$\begin{aligned} \left|\left|u(B^{-1}x)\right|\right|^2 &= \left|\left|B^{-1}x\right|\right|^2 \\ &= {}^t(B^{-1}x).B^{-1}x \\ &= {}^txB^{-2}x \\ &= {}^txAx \end{aligned}$$

et donc $x/\sqrt{n}$ appartient à $E(A) = E_K$, i.e. K est inclus dans $\sqrt{n}E_K$ et donc

$$E_K \subset K \subset \sqrt{n}E_K \ .$$

Comme la polarité renverse les inclusions, en utilisant $I.2$ pour les homothéties, on a aussi

$$\frac{1}{\sqrt{n}}E_K^* \subset K^* \subset E_K^* \ .$$

De plus si $E_K = E(A)$ pour une certaine matrice A définie positive, on a (en posant $X^* = {}^tX^{-1}$)

$$E_K^* = (B(B_n))^* = B^*(B_n^*) = B^*(B_n) = E((B^*)-2) = E(A^*) \ .$$

Par conséquent

$$\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*) \geqslant \frac{\mathrm{vol}(E(A))\mathrm{vol}(E(A^*))}{(\sqrt{n})^n} = \frac{\det(A)^{-1/2}\det(A^*)^{-1/2}\mathrm{vol}(B_n)^2}{n^{n/2}} = \frac{\mathrm{vol}(B_n)^2}{n^{n/2}} \ .$$

Question 2

2.a Soit (ξ, λ) dans $H \times \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned} (\xi,\lambda) \in K^* &\Leftrightarrow \forall t \in I \quad \forall x \in K_t \qquad \langle \xi, x\rangle + \lambda t \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in I \qquad \lambda t \leqslant \varphi_\xi^K(t) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 0 \leqslant \varphi_\xi^K(0) & \\ \forall t \in I \cap \mathbf{R}_+^* & \lambda \leqslant \varphi_\xi^K(t)/t \\ \forall t \in I \cap \mathbf{R}_-^* & \lambda \geqslant \varphi_\xi^K(t)/t \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi \in (K_0)^* \\ \lambda \leqslant \inf_{t>0} \varphi_\xi^K(t)/t \\ \lambda \geqslant \sup_{t>0} \varphi_\xi^K(-t)/(-t) \end{array}\right. \end{aligned}$$

et donc

$$(\xi,\lambda) \in K^* \Leftrightarrow \left(\xi \in (K_0)^* \quad \text{et} \quad -\inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t} \leqslant \lambda \leqslant \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)}{t}\right) \ .$$

2.b D'après le théorème de Fubini, par mesurabilité des compacts, on a

$$\mathrm{vol}(K') = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{vol}(K'_t)dt \ .$$

De plus le théorème de Brunn-Minkowski entraîne

$$\mathrm{vol}(K'_t)^{1/(n-1)} \geqslant \frac{1}{2}\left(\mathrm{vol}(K_t)^{1/(n-1)} + \mathrm{vol}(-K_t)^{1/(n-1)}\right) = \mathrm{vol}(K_t)^{1/(n-1)}$$

et donc

$$\mathrm{vol}(K') \geqslant \int_{\mathbf{R}} \mathrm{vol}(K_t)dt = \mathrm{vol}(K) .$$

Remarquons que la fonction qui à t associe $\mathrm{vol}(K_t)^{1/(n-1)}$ est concave sur I ; en effet si t et t' appartiennent à I et si λ est un réel compris entre 0 et 1, par convexité de K, $K_{\lambda t+(1-\lambda)t'}$ contient $\lambda K_t + (1-\lambda)K_{t'}$ et l'assertion résulte du théorème de Brunn-Minkowski. Par conséquent cette fonction est continue sur l'intérieur de I et on ne peut donc avoir l'égalité $\mathrm{vol}(K') = \mathrm{vol}(K)$ que si, pour tout t intérieur à I, K_t et $-K_t$ sont dilatés l'un de l'autre. Comme ils ont même volume, ceci est équivalent au fait qu'ils soient translatés l'un de l'autre. Si on note $2\mu_t$ le vecteur tel que $K_t = 2\mu_t - K_t$, μ_t est le centre de symétrie cherché.

2.c En appliquant ce qui précède à K', on a donc aussi

$$(\xi,\lambda) \in (K')^* \Leftrightarrow \left(\xi \in (K'_0)^* \quad \text{et} \quad -\inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^{K'}(-t)}{t} \leqslant \lambda \leqslant \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^{K'}(t)}{t}\right) .$$

Remarquons que, si ξ appartient à K_0^*, alors $\varphi_\xi^K(0) \geqslant 0$. En on a donc, pour t dans $I \cap \mathbf{R}_+^*$ et par dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes,

$$\frac{\varphi_\xi^K(t)}{t} \geqslant \frac{\varphi_\xi^K(t) - \varphi_\xi^K(0)}{t} \geqslant \left(\varphi_\xi^K\right)'_d(0)$$

par convexité de φ_ξ^K. De même, toujours pour t dans $I \cap \mathbf{R}_+^*$,

$$\frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t} \geqslant -\frac{\varphi_\xi^K(-t) - \varphi_\xi^K(0)}{-t} \geqslant -\left(\varphi_\xi^K\right)'_g(0) .$$

Par conséquent, pour ξ dans K_0^*, toujours par convexité,

$$\inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t} \geqslant 0$$

et donc

$$\mathrm{vol}(K^*) = \int_{K_0^*} \left(\inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t}\right) d\xi .$$

On a aussi, en appliquant ce qui précède à K',

$$\inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^{K'}(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^{K'}(-t)}{t} \geqslant 0$$

et comme de plus $K'_0 = (K_0 + K_0)/2 = K_0$, et donc aussi $K_0^* = (K'_0)^*$,

$$\mathrm{vol}((K')^*) = \int_{(K_0)^*} \left(\inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^{K'}(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^{K'}(-t)}{t}\right) d\xi = 2\int_{(K_0)^*} \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^{K'}(t)}{t} d\xi ,$$

par symétrie de K'.

Soit maintenant t dans I et x dans K'_t. Choisissons y et z dans K_t et K_{-t} tel que x soit le milieu de y et z. Pour ξ dans H, on a

$$1 - \langle \xi, x\rangle = \frac{1}{2}\left(1 - \langle \xi, y\rangle + 1 - \langle \xi, z\rangle\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\varphi_\xi^K(t) + \varphi_\xi^K(-t)\right) .$$

Il en résulte

$$\varphi_\xi^{K'}(t) \geqslant \frac{1}{2}\left(\varphi_\xi^K(t) + \varphi_\xi^K(-t)\right)$$

et, a fortiori,

$$2\inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^{K'}(t)}{t} \geqslant \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t} \ .$$

En intégrant l'inégalité précédente sur K_0^*, on obtient

$$\mathrm{vol}(K^*) \leqslant \mathrm{vol}((K')^*) \ .$$

Par conséquent

$$\mathrm{vol}((K')^*)\mathrm{vol}(K') \geqslant \mathrm{vol}(K^*)\mathrm{vol}(K) \ .$$

Par maximalité de $\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*)$, on a donc $\mathrm{vol}(K) = \mathrm{vol}(K')$ et $\mathrm{vol}(K^*) = \mathrm{vol}((K')^*)$. En particulier K_t admet un centre de symétrie pour tout t dans l'intérieur de I, d'après la question précédente.

2.d Soit ξ dans H^*. Remarquons que, pour tout λ strictement positif et pour tout t dans I, on a

$$\varphi_{\xi/\lambda}^K(t) = \frac{1}{\lambda}\left(\varphi_\xi^K(t) + \lambda - 1\right) \ .$$

Remarquons également que, pour tout t dans I, $\varphi_\xi^K(-t) = \varphi_{-\xi}^K(t)$ et que ξ/λ est intérieur à K_0^* si et seulement si $\varphi_{\xi/\lambda}^K(0) > 0$ ou encore $\lambda > 1 - \varphi_\xi^K(0)$.

Comme il y a égalité dans l'inégalité entre les intégrales donnant $\mathrm{vol}(K^*)$ et $\mathrm{vol}((K')^*)$ et par continuité des fonctions convexes sur l'intérieur de leur ensemble de définition, nécessairement pour tout λ strictement supérieur à $1 - \varphi_\xi^K(0)$, les fonctions $t \mapsto \varphi_{\xi/\lambda}^K(t)/t$ et $t \mapsto \varphi_{-\xi/\lambda}^K(t)/t$ atteignent leur minimum en même temps sur l'intérieur de $I \cap \mathbf{R}_+^*$. Par conséquent, par convexité, leurs dérivées à droite sont de même signe en tout point. Il en résulte que les fonctions

$$t \mapsto \frac{\varphi_\xi^K(t) + \lambda - 1}{t} \qquad \text{et} \qquad t \mapsto \frac{\varphi_{-\xi}^K(t) + \lambda - 1}{t}$$

ont des dérivées à droite de même signe pour tout λ strictement supérieur à $1 - \varphi_\xi^K(0)$. Autrement dit, pour tout t intérieur à $I \cap \mathbf{R}^+$,

$$\forall \lambda \in]1 - \varphi_\xi^K(0); +\infty[\qquad t\left(\varphi_\xi^K\right)'_d(t) - \varphi_\xi^K(t) \geqslant \lambda - 1 \Leftrightarrow t\left(\varphi_{-\xi}^K\right)'_d(t) - \varphi_{-\xi}^K(t) \geqslant \lambda - 1 \ .$$

Or, par convexité

$$\forall t \in I \cap \mathbf{R}_+ \qquad t\left(\varphi_\xi^K\right)'_d(t) - \varphi_\xi^K(t) \geqslant -\varphi_\xi^K(0) \qquad \text{et} \qquad t\left(\varphi_{-\xi}^K\right)'_d(t) - \varphi_{-\xi}^K(t) \geqslant -\varphi_{-\xi}^K(0) = -\varphi_\xi^K(0) \ .$$

L'assertion précédente entraîne donc l'égalité, pour tout t intérieur à $I \cap \mathbf{R}^+$

$$t\left(\varphi_\xi^K\right)'_d(t) - \varphi_\xi^K(t) = t\left(\varphi_{-\xi}^K\right)'_d(t) - \varphi_{-\xi}^K(t)$$

et donc

$$\left(t \mapsto \frac{\varphi_{-\xi}^K(t) - \varphi_\xi^K(t)}{t}\right)'_d = 0 \quad \text{sur } I \cap \mathbf{R}_+^* \ .$$

Le théorème des accroissements finis assure donc que $\varphi_{-\xi}^K - \varphi_\xi^K$ est affine. Comme elle est nulle en 0, par symétrie de K_0, elle est linéaire, ce qui équivaut à l'existence d'un μ_ξ tel que, pour tout t intérieur à I et strictement positif,

$$\varphi_{-\xi}^K(t) - \varphi_\xi^K(t) = \varphi_\xi^K(-t) - \varphi_\xi^K(t) = \mu_\xi t \ .$$

2.e Puisque, pour t intérieur I, on a $K_t = 2\mu_t + K_{-t}$, il en résulte que, pour tout t intérieur à I et tout ξ dans H^*, on a

$$\varphi_\xi^K(t) = -2\langle \xi, \mu_t \rangle + \varphi_\xi^K(-t)$$

et, pour tout t strictement positif

$$\langle \xi, \frac{\mu_t}{t} \rangle = \frac{1}{2}\mu_\xi$$

est indépendant de t.

Il en résulte qu'il existe μ dans H tel que $\mu_t = t\mu$ pour tout t dans l'intérieur de I, non nul. K_0 étant O-symétrique, cette égalité est encore valable pour t nul.

Soit maintenant u une borne de I et x un point de H. Par convexité et compacité de K, x appartient à K_u si et seulement si l'intervalle $[O; x[$ est inclus dans K. En particulier x appartient à K_u si et seulement si $2u\mu - x$ y appartient, par symétrie des K_t pour t entre 0 et u. Finalement K_t admet $t\mu$ comme centre de symétrie pour tout t dans I.

Soit s l'application de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même définie par $s(x,t) = -(2t\mu - x, t) = (x - 2t\mu, -t)$. C'est un endomorphisme involutif. De plus, si (x,t) appartient à K, x appartient à K_t et donc à $2t\mu - K_t$, i.e. $-(2t\mu - x)$ appartient à $-K_t = K_{-t}$ et donc $s(x,t)$ appartient à K. En d'autres termes s laisse K globalement invariant. De plus les restrictions de s à H et $\mathbf{R}(\mu, 1)$ étant l'identité et moins l'identité, s est bien une symétrie par rapport à H.

Remarquons que, pour tout scalaire strictement positif λ, λK_t admet $\lambda t\mu$ comme centre de symétrie. Il en résulte que s laisse λK globalement invariant et donc, par définition de j_K et linéarité de s, $j_K(s(x,t)) = j_K(x,t)$, i.e. s est une isométrie pour j_K.

2.f Soit q une forme quadratique invariante par le groupe des j_K-isométries. Soit a et x dans $\mathbf{R}^n$ distincts et tels que $j_K(a) = 1$ et $q(x) = q(a)$.

Soit σ la symétrie q-orthogonale par rapport à l'hyperplan médiateur H de a et x. Autrement dit, si φ_q est la forme polaire de q et si y est dans $\mathbf{R}^n$, on a

$$\sigma(y) = y - 2\frac{\varphi_q(a-x,y)}{q(a-x)}(a-x) .$$

D'après ce qui précède, il existe également une symétrie s par rapport à H et j_K isométrique. Comme $q \circ s = q$, on a aussi, par polarisation, pour tout y et z dans $\mathbf{R}^n$, $\varphi_q(s(y), s(z)) = \varphi_q(y,z)$. Or s est l'identité sur H et l'image de a par s vérifie

$$q(s(a)) = q(a) \qquad \text{et} \quad \forall h \in H \quad \varphi_q(s(a),h) = \varphi(s(a), s(h)) = \varphi_q(a,h)$$

i.e.

$$q(s(a)) = q(a) \qquad \text{et} \qquad s(a) - a \in H^\perp .$$

Par conqéquent $s(a) = \sigma(a) = x$. On a donc $s = \sigma$ et surtout $j_K(x) = j_K(s(a)) = j_K(a) = 1$.

On a donc démontré que si $j_K(a) = 1$ et $q(x) = q(a)$, alors $j_K(x) = 1$. Soit donc a un point quelconque de $\mathbf{R}^n$ tel que $j_K(a) = 1$, i.e. un point de la frontière de K. Pour tout x non nul de $\mathbf{R}^n$, soit $\alpha = \sqrt{q(a)/q(x)}$; on a alors $q(\alpha x) = q(a)$ et donc $j_K(\alpha x) = 1$, soit encore $j_K(x) = 1/\alpha = \sqrt{q(x)/q(a)}$. Cette égalité est encore vraie pour x nul.

Par conséquent j_K est une norme euclidienne et K, sa boule unité, est un ellipsoïde : il est défini par $q(x) \leqslant q(a)$. On a déjà calculé le produit $\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*)$ en 1.*e*. et on a donc

$$\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*) = \mathrm{vol}(B_n)^2 .$$

Question 3

Pour obtenir l'inégalité demandée, en tenant compte de 1.*b* et de 2.*f*, il suffit de montrer que la fonction v, définie sur $\mathcal{C}$, $v(K) = \mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*)$ atteint son maximum.

On va tout d'abord montrer qu'elle est continue. Soit K dans $\mathcal{C}$. Un voisinage de K est donné, pour tout ε strictement positif, par

$$V_\varepsilon = \{K' \in \mathcal{C} \mid (1+\varepsilon)^{-1}K \subset K' \subset (1+\varepsilon)K\} .$$

Or, pour K' dans ce voisinage, on a

$$(1+\varepsilon)^{-1}K^* \subset (K')^* \subset (1+\varepsilon)K^*$$

et donc

$$(1+\varepsilon)^{-2n}\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*) \leqslant \mathrm{vol}(K')\mathrm{vol}((K')^*) \leqslant (1+\varepsilon)^{2n}\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*) .$$

Par conséquent v est continue.

On va maintenant montrer qu'on peut restreindre l'étude à un compact de $\mathcal{C}$. Soit donc

$$C = \{K \in \mathcal{C} \mid B_n \subset K \subset \sqrt{n} B_n\} .$$

Par définition de la topologie sur $\mathcal{C}$, c'est bien un compact. De plus si on se donne K dans $\mathcal{C}$, si A est l'automorphisme de $\mathbf{R}_n$ qui envoie E_K sur B_n, alors $A(K)$ appartient à C et on a $v(A(K)) = v(K)$. Il en résulte $\sup_{\mathcal{C}} v = \sup_C v = \max_C v = \max_{\mathcal{C}} v$, i.e. v atteint son maximum.

Finalement, pour tout corps convexe compact K, on a

$$\frac{\mathrm{vol}(B_n)^2}{n^{n/2}} \leqslant \mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*) \leqslant \mathrm{vol}(B_n)^2 .$$

Remarque : le fait que $(\mathcal{C}, d)$ soit un espace métrique est élémentaire. La compacité du voisinage de K résulte quant à elle du théorème d'Ascoli. En effet, en notant $\mathcal{V}_{a,b}$ le voisinage

$$\mathcal{V}_{a,b} = \{K' \in \mathcal{C} \mid aK \subset K' \subset bK\} ,$$

l'ensemble des fonctions $j_{K'}$ pour K' dans $\mathcal{V}_{a,b}$ est équicontinu et fermé en tant que sous-ensemble de l'espace des fonctions continues de B_n dans $\mathbf{R}$, muni de la topologie de la convergence uniforme. Il est donc compact d'après le théorème d'Ascoli et la compacité de $\mathcal{V}_{a,b}$ en résulte, par exemple grâce au critère séquentiel.